23/3

Άσκηση

Ένα βαρύ σώμα είναι υποχρεωμένο να κινείται στην επιφάνεια της σφαίρας: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ υπό την επίδραση του $B=-mg\vec{z}_0$
Σε ποια θέση ισορροπεί το σώμα

Λύση

Θέλω $m\ddot{r}=0 \Rightarrow F^{(\varepsilon)}+\lambda\,\mathrm{grad} f=0 \Rightarrow$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\alpha^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0 \\ F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda\cdot 2x=0 \\ \lambda\cdot 2y=0 \\ -mg+\lambda\cdot 2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Σημείο: $\left(0,\ 0,\ \frac{mg}{2\lambda}\right)$ το οποίο είναι σημείο της $f(x,y,z)=0$

άρα $0^2+0^2+\frac{m^2g^2}{4\lambda^2}=\alpha^2 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{mg}{2\alpha}$

άρα τα σημεία είναι 2: $(0,0,\alpha)$ και $(0,0,-\alpha)$

Άσκηση

Αν η καμπύλη που ήταν υποχρεωμένο το σωμάτιο να κινείται ήταν $f_1(x,y,z,t)$ και $f_2(x,y,z,t)$

Λύση

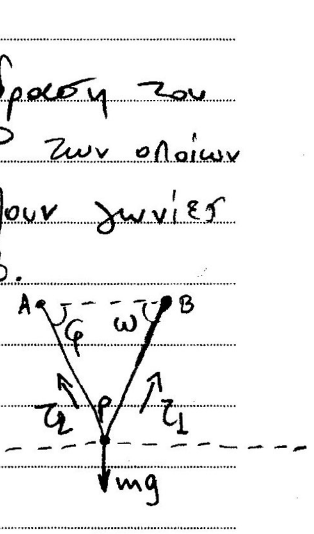
Η συνθήκη ισορροπίας θα ήταν $m\ddot{r}=F+F^{(\delta)}=0$

όπου $F+F^{(\delta)}=0$ όπου $F^{(\delta)}=\lambda_1\,\mathrm{grad} f_1+\lambda_2\,\mathrm{grad} f_2$

$$\left\{\begin{array}{l} F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}=0 \\ F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}=0 \\ F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}=0 \end{array}\right.$$

ΑΣΚΗΣΗ-ΣΠΙΤΙ

Ένα σώμα P με μάζα m κρέμεται υπό την επίδραση του βάρους του από δύο αβαρή νήματα AP και BP των οποίων τα άκρα A, B είναι στερεωμένα και σχηματίζουν γωνίες φ και ω αντίστοιχα με οριζόντια ευθεία AB.
Να βρεθούν οι τάσεις T_1 και T_2 στα δύο νήματα.



[$T_1(mg)$, $T_2(mg)$, Δυναμοπολύγωνο, $\frac{T_1}{\dots}=\frac{T_2}{\dots}=\frac{mg}{\dots}$]

Αρχή των Δυνατών Έργων

Ορισμοί

- πραγματική μετατόπιση $dr(dx, dy, dz)$
- Δυνατή μετατόπιση καλείται μια υποθετική, απειροστή μετατόπιση, συμβιβαστή με τους δεσμούς, η οποία λαμβάνει χώρα σε χρόνο μηδέν, δηλ. με άπειρη ταχύτητα
  Συμβολισμός: $\delta r(\delta x, \delta y, \delta z)$ με $\delta t = 0$
- Δυνατό Έργο παράγεται ή ξοδεύεται από μία δύναμη σε δυνατή μετατόπιση

Θεώρημα (Αρχή Δυνατών έργων)

Ένα σώμα ελεύθερο ή ανελεύθερο, ισορροπεί σε μία θέση τότε και μόνον τότε, όταν από την θέση αυτή το δυνατό έργο όλων των επιβεβλημένων δυνάμεων για κάθε δυνατή μετατόπιση δr είναι μηδέν.

Απόδειξη

- Ελεύθερο Σώμα,
  Εάν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία
  $F = 0 \Rightarrow F\delta r = 0$ δηλ. το δυνατό έργο $\delta W = F\delta r = 0$
- Αντίστροφα,
  $\delta W = 0 \Rightarrow F\delta r = 0 \Rightarrow F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$
  Τα $\delta x, \delta y, \delta z$ είναι αυθαίρετα απειροστά μεγέθη ανεξάρτητα μεταξύ τους, αφού το σώμα είναι ελεύθερο. Συνεπώς, $F_x = F_y = F_z = 0$

Ευστάθεια Ισορροπίας

Στην ειδική περίπτωση, όπου η επιβεβλημένη δύναμη F είναι συντηρητική δηλ. $F = -\mathrm{grad}V(r)$, V: δυναμικό
Η Αρχή των Δυνατών Έργων παίρνει την μορφή:
$$F\delta r = 0 \Rightarrow -\mathrm{grad}V(r)\cdot\delta r = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0$$
Αυτό σημαίνει ότι η ολική δυνατή μεταβολή της V στη θέση ισορροπίας μηδενίζεται δηλ. $\delta V = 0$

__Συμπέρασμα__

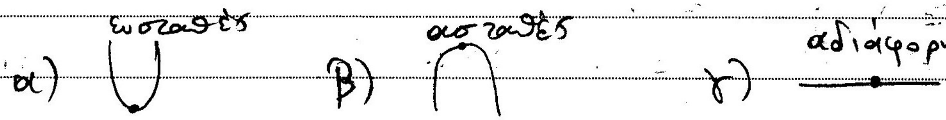
Άρα $V(x,y,z)$ στη θέση ισορροπίας έχει στάσιμη τιμή δηλ. μέγιστο ή ελάχιστο ή σημείο καμπής.

__Ορισμοί__

- Η ισορροπία ονομάζεται __ευσταθής__ όταν κάθε αρκετά μικρή διαταράξη αυτής δημιουργεί μετατοπίσεις και ταχύτητες που τείνουν να γίνουν μικρότερες.
- __Αντίθετα__, όταν διαταραχθεί η ισορροπία το σωμάτιο τείνει να απομακρυνθεί ακόμη περισσότερο από αυτήν, η ισορροπία καλείται __ασταθής__
- Εάν μια διαταράξη από τη θέση ισορροπίας δεν τείνει να μειωθεί αλλά ούτε να αυξηθεί παρά μάλλον να παραμείνει σταθερή η ισορροπία ονομάζεται __αδιάφορη__

__Θεώρημα Ευστάθειας__

Σε ένα σκληρόνομο συντηρητικό σύστημα η ισορροπία σε μια θέση είναι ευσταθής αν στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια έχει ελάχιστη τιμή



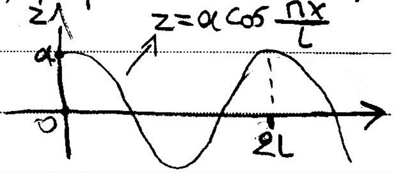
__Σημείωση__

Ισχύει $\frac{d^2V}{dx^2} > 0 \Rightarrow V_0 = min$

Ισχύει $\frac{d^2V}{dx^2} < 0 \Rightarrow V_0 = max$

Άσκηση

Ένα βαρύ σώμα μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβή πάνω στην καμπύλη του κατακόρυφου επιπέδου Oxz. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και να εξεταστεί η ευστάθεια σε αυτές.



Λύση

Η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι $V=mgz=mg\alpha\cos\frac{\pi x}{L}$

$$\frac{dV}{dx}=-\frac{m\pi g\alpha}{L}\sin\frac{\pi x}{L}=0 \Rightarrow \sin\frac{\pi x}{L}=0 \Rightarrow \frac{\pi x}{L}=k\pi \Rightarrow$$

$$x=kL\ ,\ k\in\mathbb{N}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{m\pi^2 g\alpha}{L^2}\cos\frac{\pi x}{L}$$

για $x=kL \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{L}=\cos\frac{\pi kL}{L}=\cos(\pi k)=\begin{cases}-1 & ,\ k:\text{περιττός}\\ 1 & ,\ k:\text{άρτιος}\end{cases}$

άρα $\operatorname{sgn}\left\{\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=kL}\right\}=\begin{cases}1 & \text{εάν } k:\text{περιττός}\\ -1 & \text{εάν } k:\text{άρτιος}\end{cases}$

Υπενθύμιση

$$\operatorname{sgn} f(x)=\begin{cases}-1 & ,\ \text{εάν } f(x)<0\\ 0 & ,\ \text{εάν } f(x)=0\\ 1 & ,\ \text{εάν } f(x)>0\end{cases}$$